

Matematické kyvadlo

Jaroslav Kaliánko

4. 2. 2014

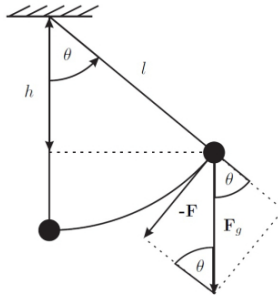
Obsah

- Odvození rovnice
- Kyvadlo bez tlumení
- Kyvadlo s tlumením

Odvození pomocí silové rovnováhy

- Rozložením tíhové síly $F_g = mg$ dostaneme sílu

$$F = -mg \sin \theta \quad (1)$$



Odvození pomocí silové rovnováhy

- Podle Newtonova druhého zákona platí vztah

$$F = ma \quad (2)$$

- Z rovnosti těchto dvou vztahů máme

$$a = -g \sin \theta \quad (3)$$

- Pro úhlové zrychlení také platí

$$a(t) = l\theta''(t) \quad (4)$$

- Pohyb matematického kyvadla je popsán rovnicí

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (5)$$

kde g je tíhové zrychlení, l délka vlákna

Lineární rovnice kyvadla bez tlumení

- Pokud je výchylka θ dostatečně malá, lze rovnici

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

linearizovat na rovnici

$$\theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (6)$$

- Obecné řešení této lineární diferenciální rovnice je

$$\theta(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Lineární rovnice kyvadla bez tlumení

- Přidáme-li počáteční podmínky

$$\theta(0) = \theta_0,$$

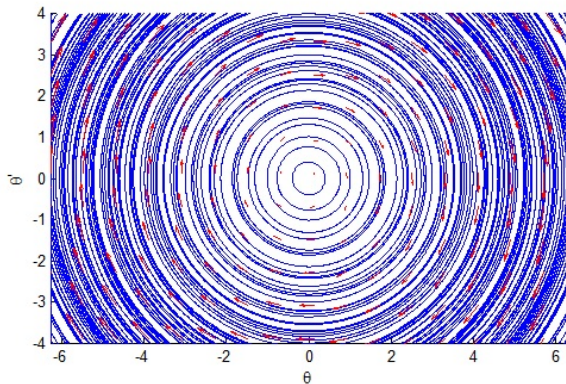
$$\theta'(0) = 0,$$

dostaneme partikulární řešení

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right), \quad (8)$$

kde θ_0 je počáteční úhlová výchylka

Lineární rovnice kyvadla bez tlumení - fázový portrét



Obrázek : Fázový portrét lineární diferenciální rovnice kyvadla bez tlumení pro $g = 9.81$, $l = 9.81$

Nelineární rovnice kyvadla bez tlumení

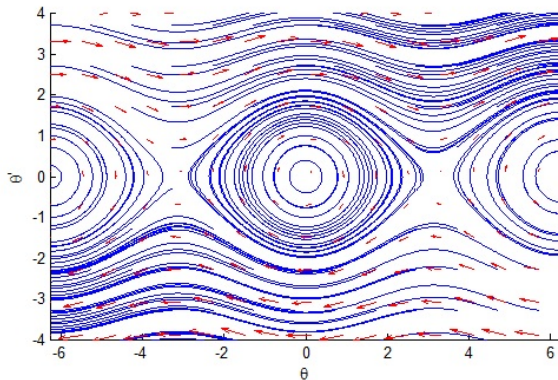
- Pokud je výchylka θ velká, nemůžeme linearizovat rovnici

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

a vyjádřit řešení explicitně pomocí elementárních funkcí

- Můžeme ale určit trajektorie řešení z fázového portréту

Nelineární rovnice kyvadla bez tlumení - fázový portrét



Obrázek : Fázový portrét nelineární diferenciální rovnice kyvadla bez tlumení pro $g = 9.81$, $l = 9.81$

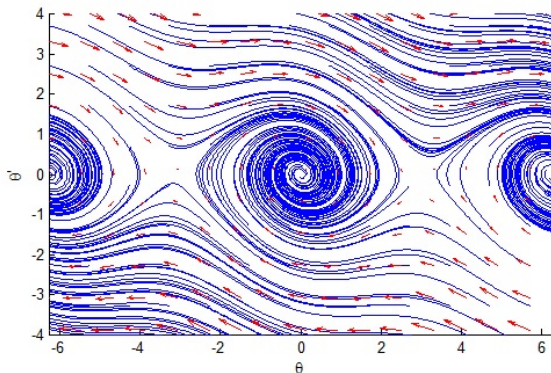
Nelineární rovnice kyvadla s tlumením

- Nelineární rovnici pohybu kyvadla s tlumením určuje vztah

$$\theta'' + \frac{b}{m}\theta' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \quad (9)$$

kde b je tlumicí konstanta, m hmotnost hmotného bodu, g tíhové zrychlení, l délka vlákna

Nelineární rovnice kyvadla s tlumením - fázový portrét



Obrázek : Fázový portrét nelineární diferenciální rovnice kyvadla s tlumením pro $b = 1$, $m = 4$, $g = 9.81$, $l = 9.81$

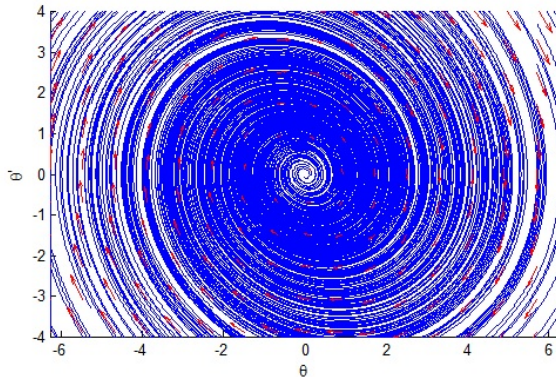
Lineární rovnice kyvadla s tlumením

- Lineární rovnici pohybu kyvadla s tlumením určuje vztah

$$\theta'' + \frac{b}{m}\theta' + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad (10)$$

kde b je tlumicí konstanta, m hmotnost hmotného bodu, g tíhové zrychlení, l délka vlákna a výchylka θ je dostatečně malá

Lineární rovnice s tlumením - fázový portrét



Obrázek : Fázový portrét linearizované diferenciální rovnice kyvadla s tlumením pro $b = 1$, $m = 4$, $g = 9.81$, $l = 9.81$

Děkuji za pozornost